# Rapport TP3 - Signaux aléatoires

---

**Kévin FELTRIN**
Projet réalisé en binôme

**DSIA**

***Résumé :***

Ce TP introduit les concepts de stationnarité, d'ergodicité et de débruitage sur des données simulées.Nous allons générer plusieurs réalisations d'une même sinusoïde perturbée par un bruit blanc : la moyenne d'ensemble retrouve la sinusoïde et la moyenne temporelle tend vers zéro, illustrant l'ergodicité d'ordre 1. On compare un bruit gaussien (moyenne nulle) et un bruit uniforme (moyenne ≈ 0,5), que l'on recentre avant l'auto-corrélation. Enfin, un petit filtre de Wiener (ordre 1) estimé via les corrélations entre le bruit et le signal permet de soustraire la part expliquée par le bruit et d'améliorer le rapport signal-bruit.

Table des matières

LISTE DES FIGURES 4
Partie A : ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DE QUELQUES SIGNAUX ALÉATOIRES 5
Partie A1 : ÉTUDE D'UNE SINUSOÏDE BRUITÉE 5
Stationnaire et/ou ergodique d'ordre 1 ? 8
Partie A2 : ETUDE DE BRUITS BLANCS 9
Modification pour N=5000 12
Comment transformer un bruit blanc en bruit pas blanc ? 14
Partie B : SIGNAL ALÉATOIRE BRUITE 15
Partie B1 : ETUDE D'UN SIGNAL AUDIO BRUITÉ 15
Pour RSB = 20 dB 18
Influence du RSB sur le bruit : 20
Partie B2 : DE BRUITAGE PAR FILTRAGE DE WIENER 20
Fonction debruit.m et comparaison avec l'exercice 5 du TD 20
CONCLUSION ET PERSPECTIVES 22

## LISTE DES FIGURES

Figure 1: Sinusoïde bruitée (A = 1) : réalisations, moyennes temporelles et moyenne d'ensemble
Figure 2 : Sinusoïde bruitée (A = 2) : réalisations, moyennes temporelles et moyenne d'ensemble
Figure 3 : Sinusoïde bruitée (A = 4, N = 2000, K = 800) : réalisations, moyennes temporelles et moyenne d'ensemble
Figure 4 : Bruit gaussien: signal temporel et histogramme
Figure 5 : Bruit uniforme: signal temporel et histogramme
Figure 6 : Autocorrélations
Figure 7 : Bruit gaussien : signal temporel et histogramme (N=5000)
Figure 8: Bruit uniforme: signal temporel et histogramme (N=5000)
Figure 9 : Autocorrélations (N=5000) : gaussien centré vs uniforme non recentré
Figure 10 : Signaux temporels : signal original, bruit blanc gaussien, signal bruité (RSB = 10 dB)
Figure 11: Spectrogrammes: signal original, bruit, signal bruité (RSB = 10 dB)
Figure 12 : Auto-corrélations : signal, bruit, signal bruité (RSB = 10 dB)
Figure 13 : Densités spectrales de puissance &: signal, bruit, signal bruité (RSB = 10 dB)
Figure 14 : Signaux temporels : signal original, bruit blanc gaussien, signal bruité (RSB = 20 dB)
Figure 15: Spectrogrammes: signal original, bruit, signal bruité (RSB = 20 dB)
Figure 16 : Auto-corrélations : signal, bruit, signal bruité (RSB = 20 dB) Figure 17 : Densités spectrales de puissance &: signal, bruit, signal bruité (RSB = 20 dB) Figure 18 : Signal débruité (filtre de Wiener) : temps, spectrogramme, autocorrélation et DSP

# Partie A : ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DE QUELQUES SIGNAUX ALÉATOIRES

Pour cette partie, nous disposons d'un programme (SA_PartieA.m) que nous devons comprendre et compléter. Nous disposons également d'une fonction permettant l'affichage d'un échantillon de réalisations, ainsi que des moyennes d'ensemble (statistiques) et des moyennes temporelles (fichier : « plot_rea.m »).

## Partie A1 : ÉTUDE D'UNE SINUSOÏDE BRUITÉE

Nous récupérons et observons le signal à traiter via Matlab.

On modélise le signal par la sinusoïde bruitée:
$X(n,\ \omega)\ =\ Asin(2\pi f_0\ nTe)\ +\ B(n,\ \omega)$, où $B(n,\ \omega)$ est un bruit blanc gaussien $N(0, \sigma^2)$ (ici $\sigma\ =\ 1$ via randn) et A est l'amplitude de la sinusoïde.
Nous utilisons comme paramètres N = 500 échantillons et K = 200 réalisations.

Le code de SA_PartieA.m fait appel à la fonction plot_rea afin de tracer les moyennes temporelles et statistiques.

Voici les figures que nous obtenons:

Pour A = 1:

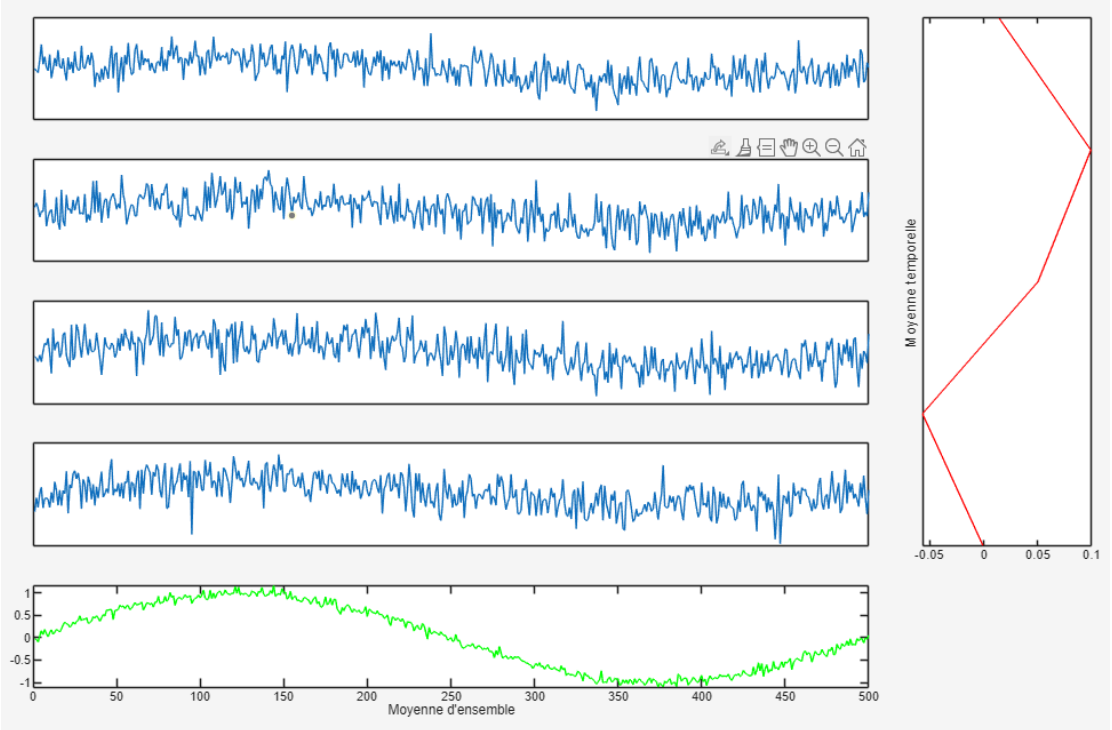



*Figure 1: Sinusoïde bruitée (A = 1) : réalisations, moyennes temporelles et moyenne d'ensemble*

La figure ci-dessus montre quatre réalisations d'une même sinusoïde fortement bruitée : à l'échelle d'une réalisation, le bruit domine et la sinusoïde est peu visible. La courbe verte est la moyenne d'ensemble sur K réalisations ; elle fait clairement réapparaître la sinusoïde en lissant le bruit. La courbe rouge regroupe les moyennes temporelles des réalisations, qui varient d'une réalisation à l'autre et restent proches de zéro sans coïncider avec la moyenne d'ensemble.

Pour A = 2 :

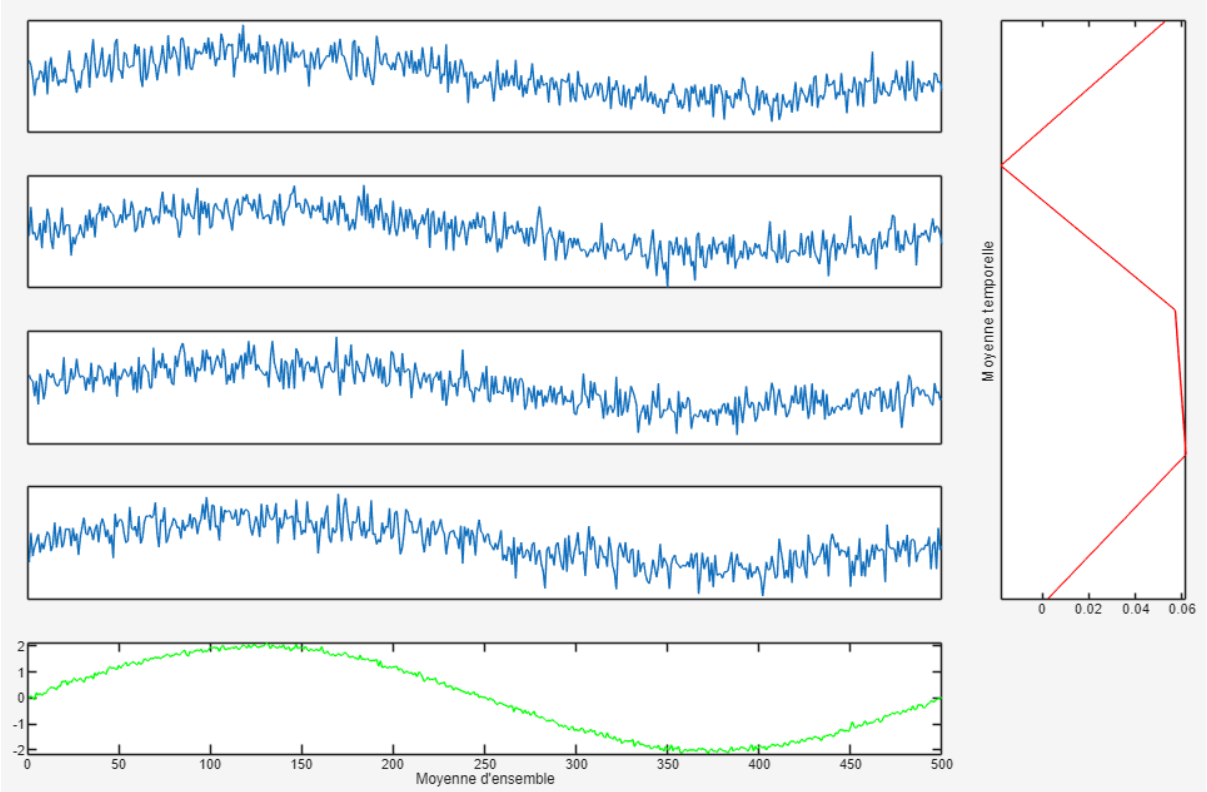



*Figure 2 : Sinusoïde bruitée (A = 2) : réalisations, moyennes temporelles et moyenne d'ensemble*

Effet de K (N=500, A=2) : Ici l'amplitude de la sinusoïde est : A = 2. Ainsi, dans chaque réalisation (panneaux de gauche), la sinusoïde est plus visible : les crêtes percent mieux à travers le bruit. La moyenne d'ensemble reconstitue la sinusoïde avec une amplitude environ doublée par rapport à la figure 1.

Quand K∈{50,200,800} augmente, la moyenne d'ensemble (vert) se lisse et se rapproche de $Asin(\omega 0n)$ ; les moyennes temporelles (rouge) restent proches de 0.

Avec A = 4, N = 2000 et K = 800:

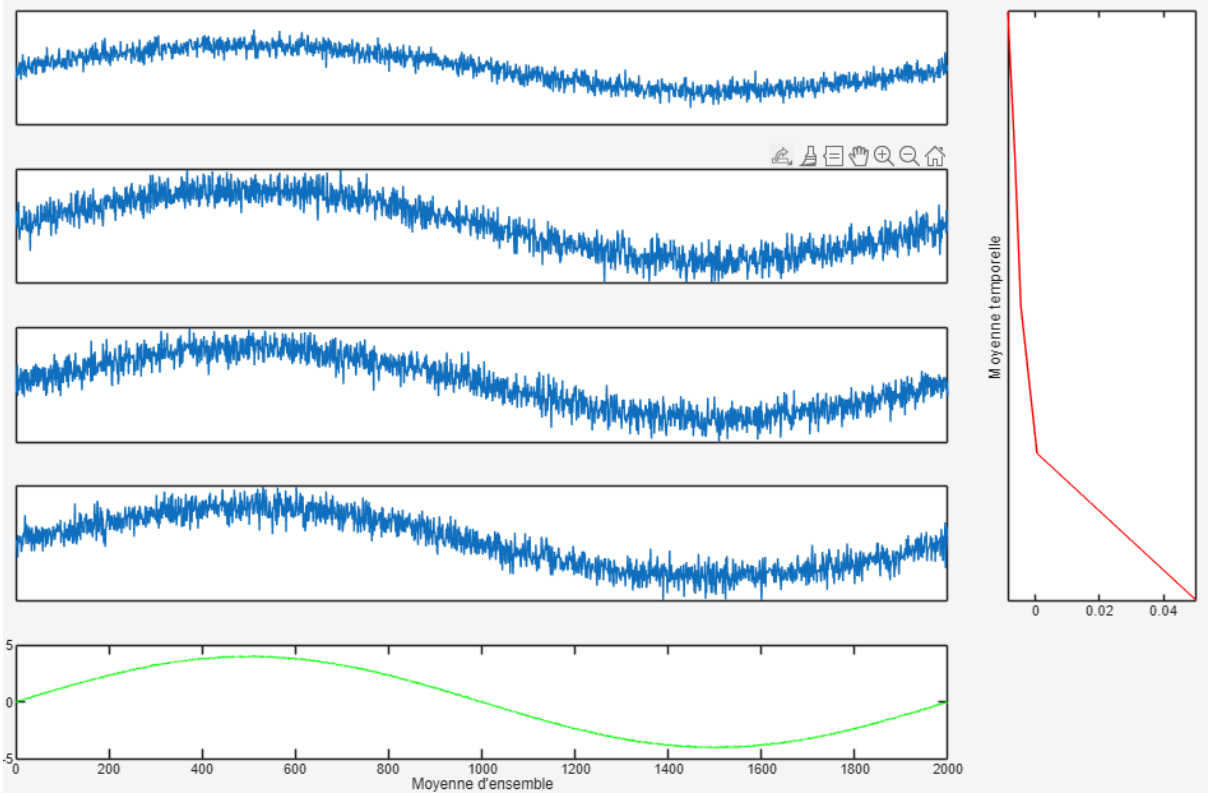



*Figure 3 : Sinusoïde bruitée (A = 4, N = 2000, K = 800) : réalisations, moyennes temporelles et moyenne d'ensemble*

Avec une amplitude A = 4, la sinusoïde transperce nettement à travers le bruit dans chaque réalisation (gain de +12 dB de puissance vs A=1). L'augmentation de K = 800 rend la moyenne d'ensemble (courbe verte) extrêmement lisse et fidèle à la sinusoïde théorique. Le N = 2000 plus grand stabilise les moyennes temporelles, désormais très proches de zéro avec de faibles fluctuations. En résumé : on obtient une meilleure lisibilité de la structure périodique et des estimateurs beaucoup plus stables.

## Stationnaire et/ou ergodique d'ordre 1 ?

Nous allons commencer par définir ce qu'est un signal stationnaire et un signal ergodique d'ordre 1.

Un signal est dit stationnaire d'ordre 1 quand son espérance $E[X[n]]$ ne dépend pas du temps.

Ici, $E[X[n]] = E\{Asin(2\pi f0nTe) + B[n]\} = Asin(2\pi f0nTe) = Asin(\omega 0n)$

car $E[B] = 0$.

On a donc $E[X[n]]$ qui dépend du temps n. Donc le signal n'est pas stationnaire (ordre 1).

En ce qui concerne l'ergodicité, un signal est ergodique (ordre 1) si, pour (presque) toute réalisation, la moyenne temporelle tend vers la moyenne d'ensemble.

Pour une réalisation, on a la moyenne temporelle sur N points:

$$\overline{X_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n] = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{N-1} sin(\omega_0 n) + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} B[n]$$

Quand $N \to \infty$ : $\frac{A}{N}\sum_{n=0}^{N-1} sin(\omega_0 n) \to 0$ (somme d'une sinusoïde bornée) et $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} B[n] \to 0$ (bruit blanc centré, loi des grands nombres).

Donc $\overline{X_N} \to 0$. Or la moyenne d'ensemble est $E[X(n)] = Asin(\omega_0 n) \neq 0$

$$\overline{X_N} \neq E[X[n]]$$

Le signal n'est donc pas ergodique d'ordre 1.

## Partie A2 : ETUDE DE BRUITS BLANCS

Dans cette partie, nous allons examiner maintenant les histogrammes de deux bruits, respectivement gaussien et uniforme.

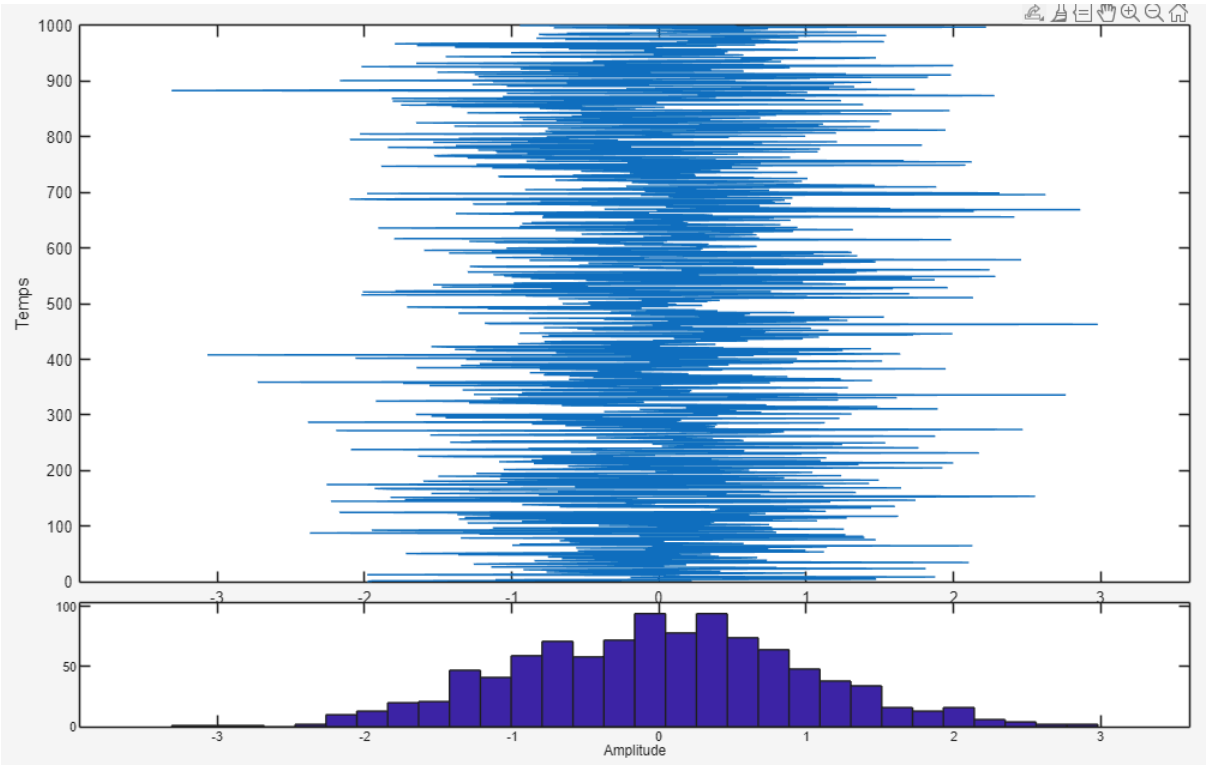



*Figure 4: Bruit gaussien: signal temporel et histogramme*

En haut, le signal aléatoire oscille autour de 0 ; en bas, l'histogramme est en cloche (gaussien) centré en 0 avec une dispersion proche de 1.

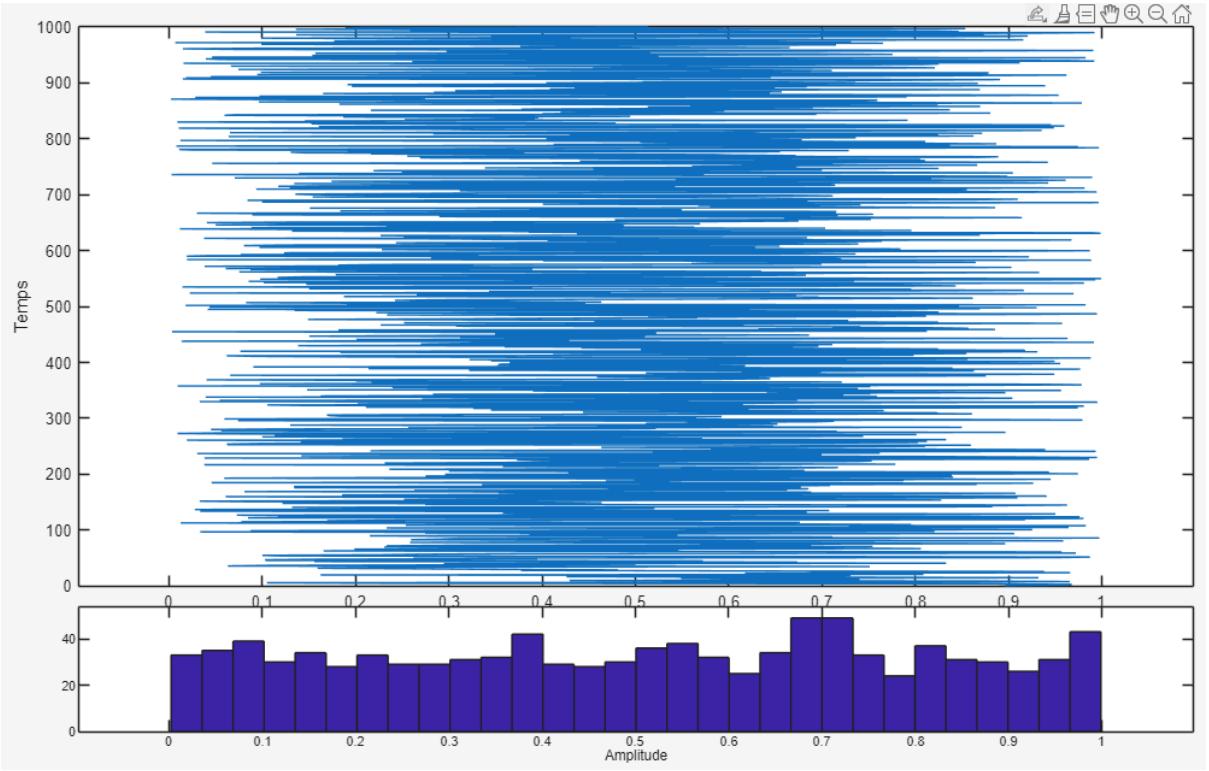



*Figure 5: Bruit uniforme: signal temporel et histogramme*

On peut voir que les valeurs occupent tout l'intervalle entre 0 et 1 avec des barres d'histogramme toutes à peu près de la même hauteur : c'est bien uniforme. Comme rien ne sort en dehors de [0,1], les échantillons restent près du milieu (autour de 0,5) : ils ne peuvent ni descendre très bas ni monter très haut.

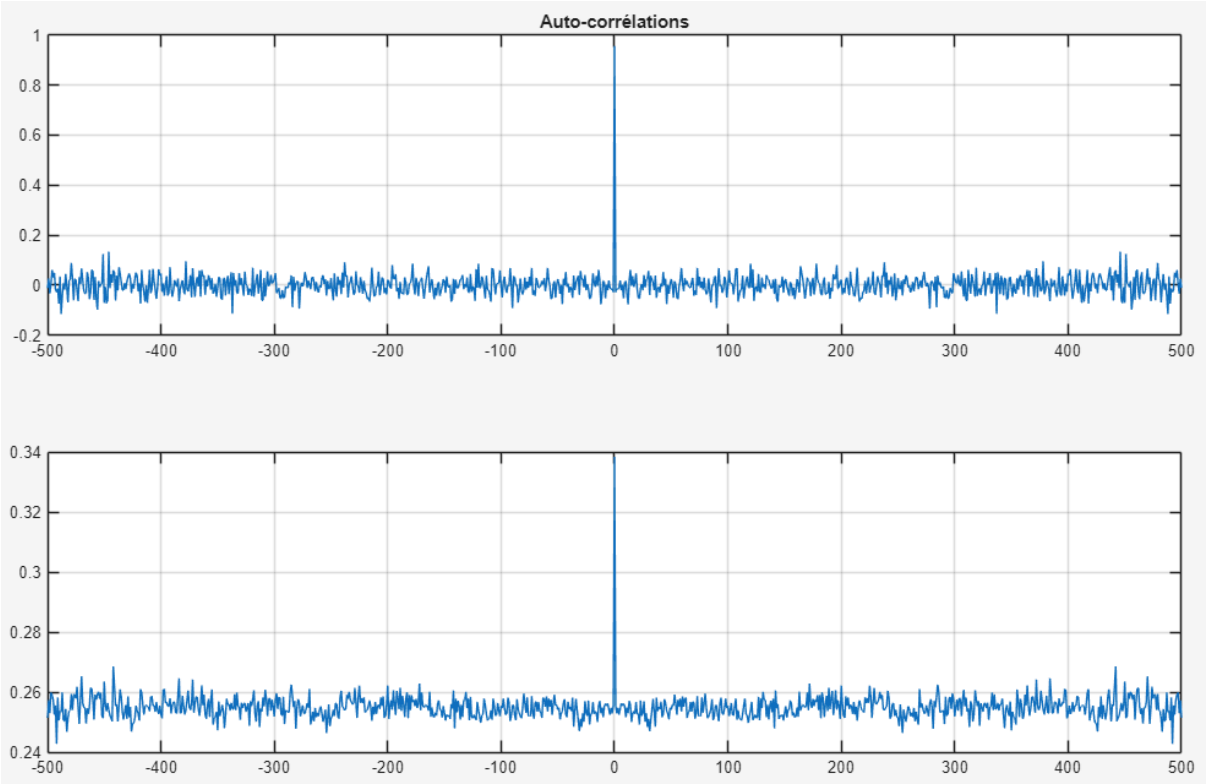



*Figure 6 : Autocorrélations*

Sur cette figure, le tracé du bruit gaussien montre un gros pic au centre et, autour, la courbe reste à plat avec de petites oscillations dues au nombre fini d'échantillons : visuellement, ça veut dire que chaque valeur n'explique pas la suivante. C'est donc un bruit  blanc.
Pour le bruit uniforme tel quel, on voit au contraire une ligne décalée au-dessus de zéro (un plateau) plus un pic central : ce décalage vient juste du fait que le signal est centré autour de 0,5.

Modification pour N=5000

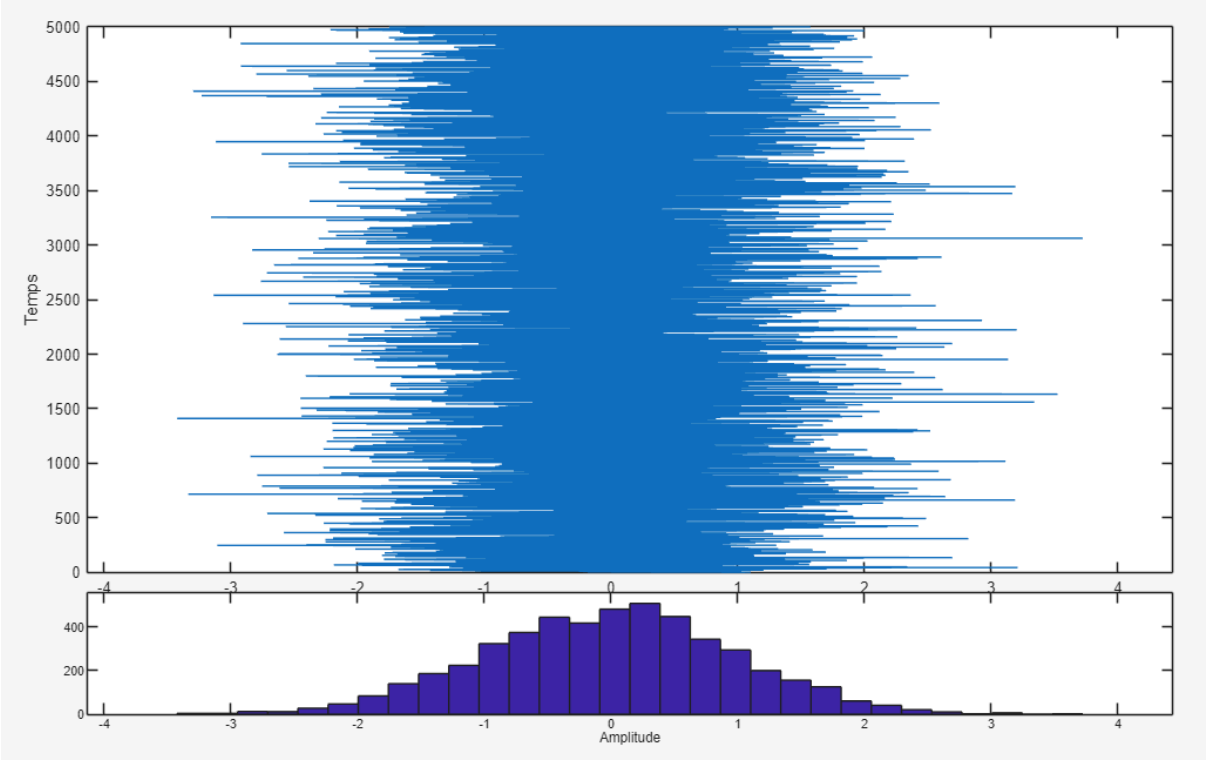



*Figure 7: Bruit gaussien: signal temporel et histogramme (N=5000)*

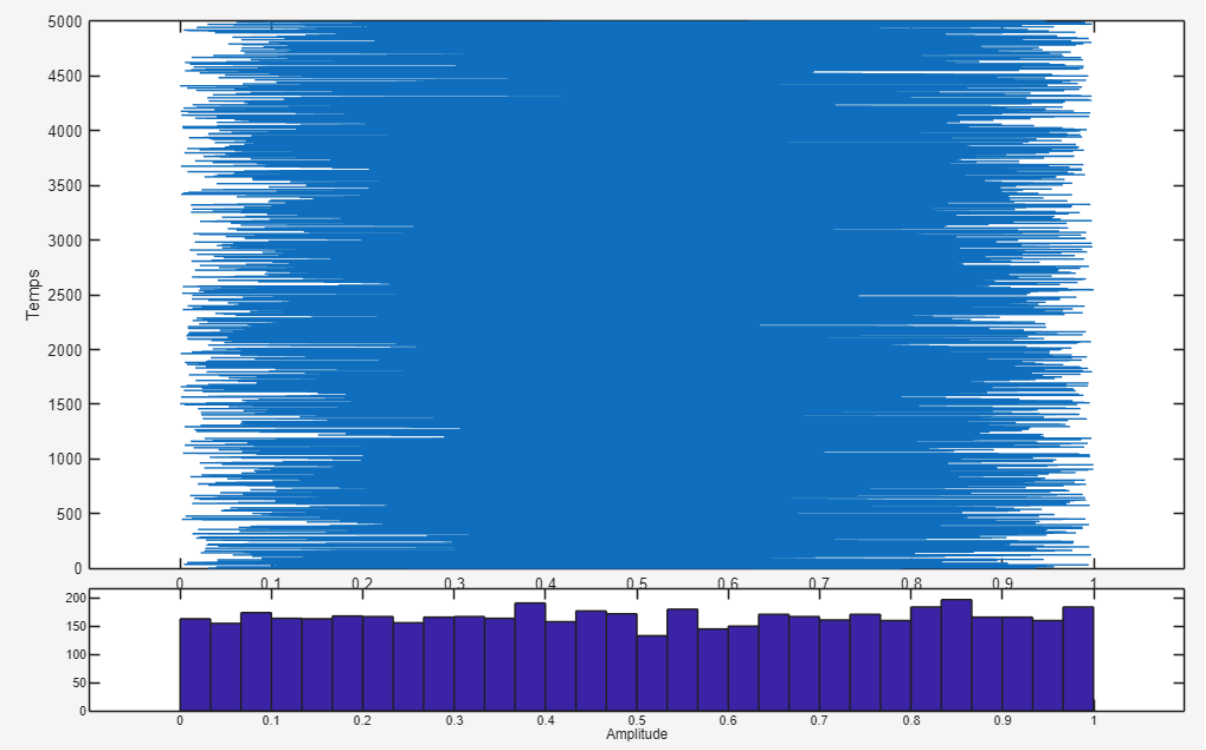



*Figure 8: Bruit uniforme: signal temporel et histogramme (N=5000)*

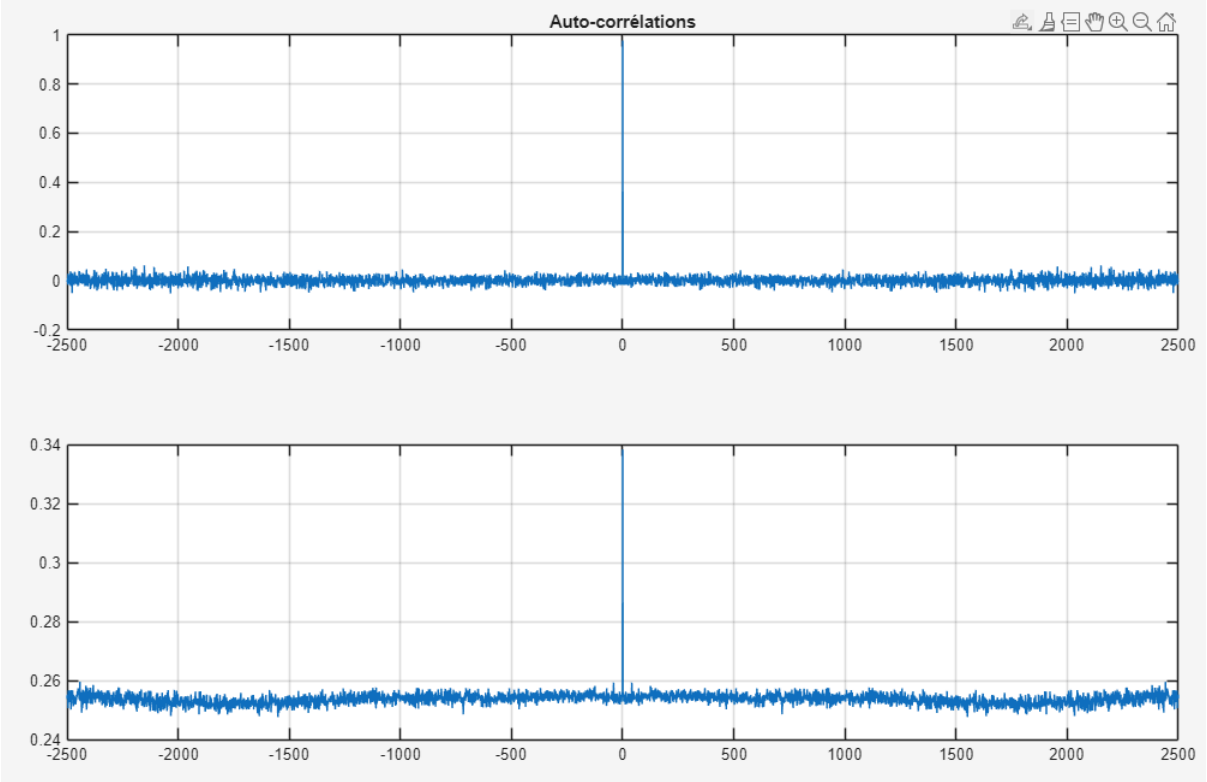



*Figure 9 : Autocorrélations (N=5000) : gaussien centré vs uniforme non recentré*

Avec N = 5000 (au lieu de N = 1000), tout devient plus “stable” :

Sur les figures 7 et 8 : les barres sont beaucoup plus lisses et proches de la forme théorique (cloche gaussienne / plat uniforme). Les valeurs estimées (moyenne, dispersion) se rapprochent de leurs vraies valeurs — normal, l’erreur statistique décroit

Sur la figure 9, en dehors du pic à ($\tau = 0$), la courbe est encore plus plate (le « bruit » de l’estimation diminue). Pour l’uniforme non recentré, on voit toujours le plateau dû à la moyenne ≈ 0,5, mais il est plus net et plus constant. Si tu recentres, les deux autocorr deviennent quasi nulles pour ($\tau \neq 0$), confirmant le caractère blanc.

En résumé : en augmentant N, on observe moins de fluctuations d’estimation, des histogrammes plus fidèles et des autocorrélations plus plates ; les conclusions restent les mêmes, mais elles sont visibles de façon plus propre.

## Comment transformer un bruit blanc en bruit pas blanc ?

Dans nos tracés, l'autocorrélation montre un pic unique à $\tau = 0$ et reste ≈ 0 pour $\tau \neq 0$ : c'est la signature de bruits blancs (échantillons non corrélés). Le cas uniforme affiche un plateau dû à sa moyenne ≈ 0,5 ; une fois recentré, il est blanc lui aussi. À l'inverse, pour obtenir un bruit non blanc, il suffit de filtrer un bruit blanc par un système LTI dont le gain n'est pas constant : l'autocorrélation devient non nulle pour $\tau \neq 0$ et la DSP n'est plus plate.

Pour recentrer et normaliser le cas uniforme, nous pouvons proposer ce **code Matlab :**

```
x = rand(1,N);

x0 = (x - mean(x))./std(x);

[r,lags] = xcorr(x0 - mean(x0), 'unbiased');

stem(lags, r);
```

# Partie B : SIGNAL ALÉATOIRE BRUITE

Pour cette partie, nous disposons d'un programme (Filt_PartieB.m) que nous devons comprendre.
Nous allons étudier un signal audio bruité, observer les caractéristiques pour des rapports RSB différents et essayer de le débruiter « au mieux ».

## Partie B1 : ETUDE D'UN SIGNAL AUDIO BRUITÉ

Nous disposons de 2 signaux audio : un signal de parole (Diner.wav) et un extrait de chanson (Extrait.wav).

Nous notons $x[n]$ le signal propre, $n[n]$ un bruit blanc gaussien centré, et $y[n] = x[n] + n[n]$ le signal bruité. La puissance moyenne du signal vaut $P_x = R_{xx}(0) = \frac{1}{N}\sum x[n]^2$ (dans le code : Ps = max(Rss)).

Le rapport signal-bruit est défini par $RSB = 10log_{10}(\frac{P_x}{P_n})$ avec $P_n = \sigma_n^2$

Ainsi, pour un RSB donné, l'écart-type du bruit ajouté est $\sigma_n = \sqrt{\frac{P_x}{10^{RSB/10}}}$; c'est la formule utilisée dans sigma = sqrt(Ps/10^(RSB/10)).

Nous utilisons les mêmes paramètres pour toutes les courbes afin de comparer correctement.

Pour RSB = 10 dB

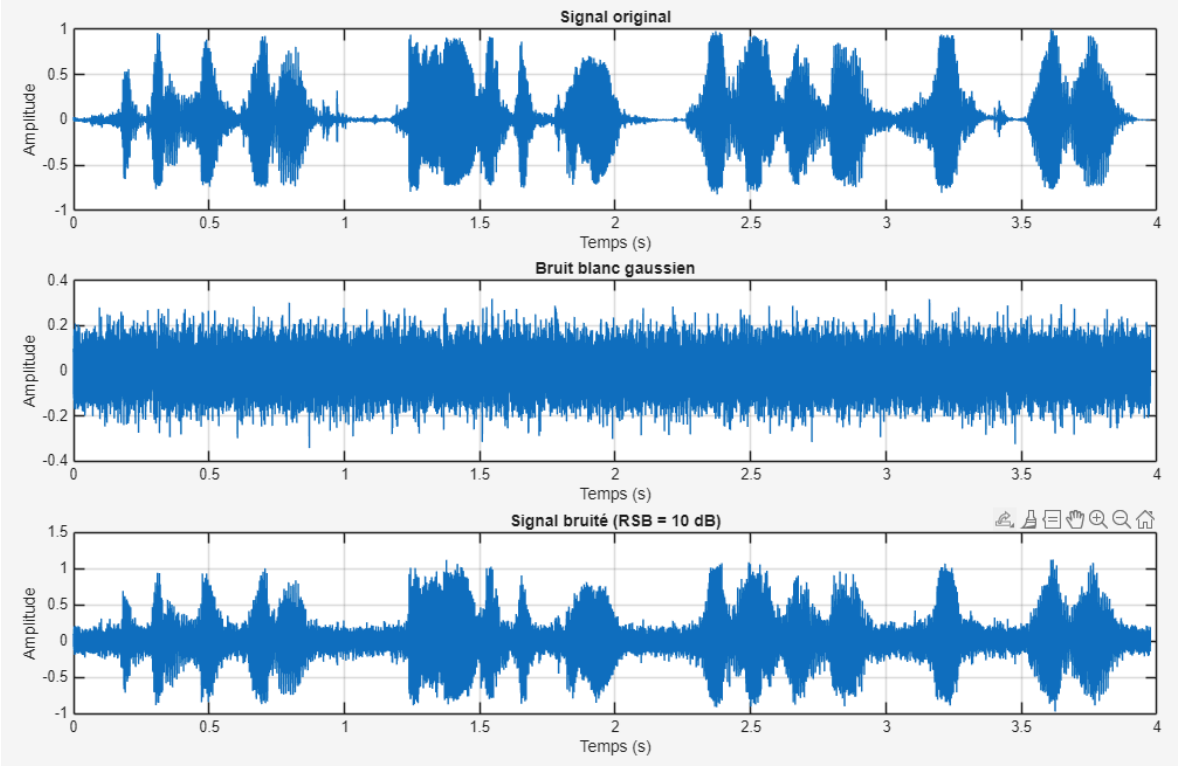



*Figure 10 : Signaux temporels : signal original, bruit blanc gaussien, signal bruité (RSB = 10 dB)*

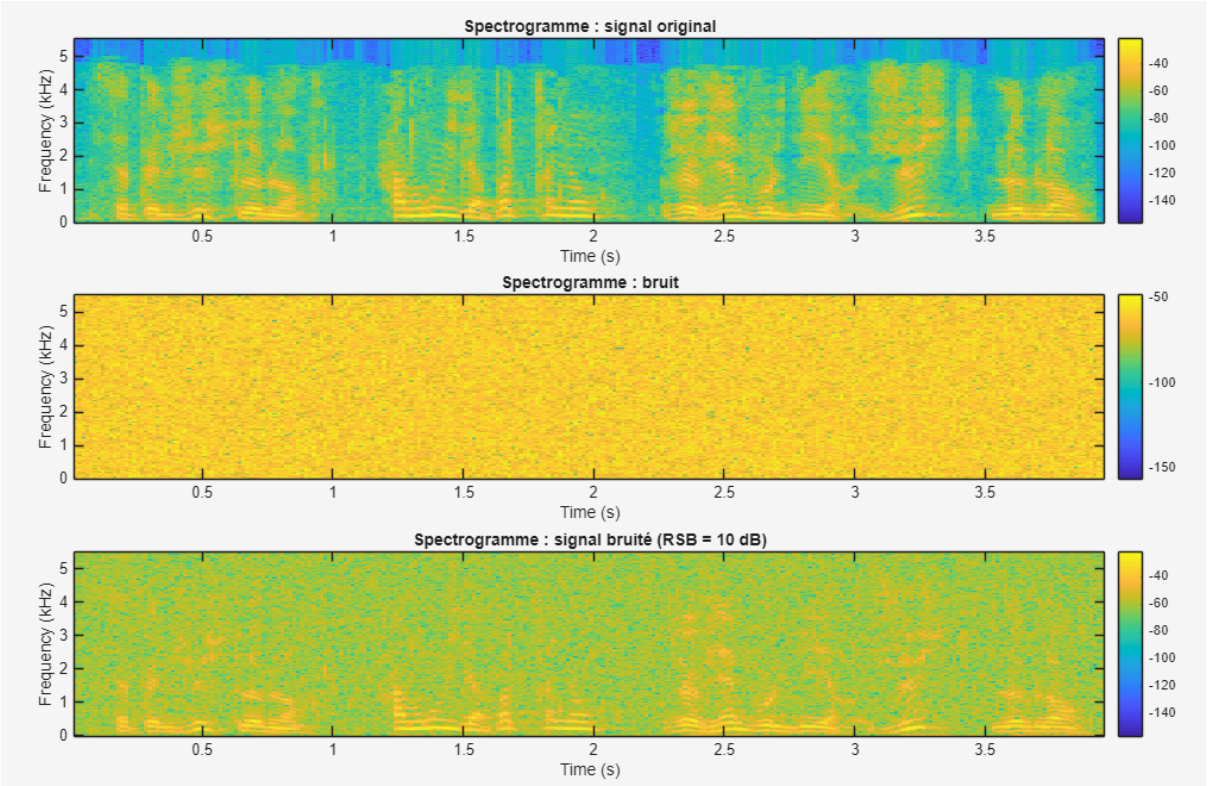



*Figure 11: Spectrogrammes: signal original, bruit, signal bruité (RSB = 10 dB)*

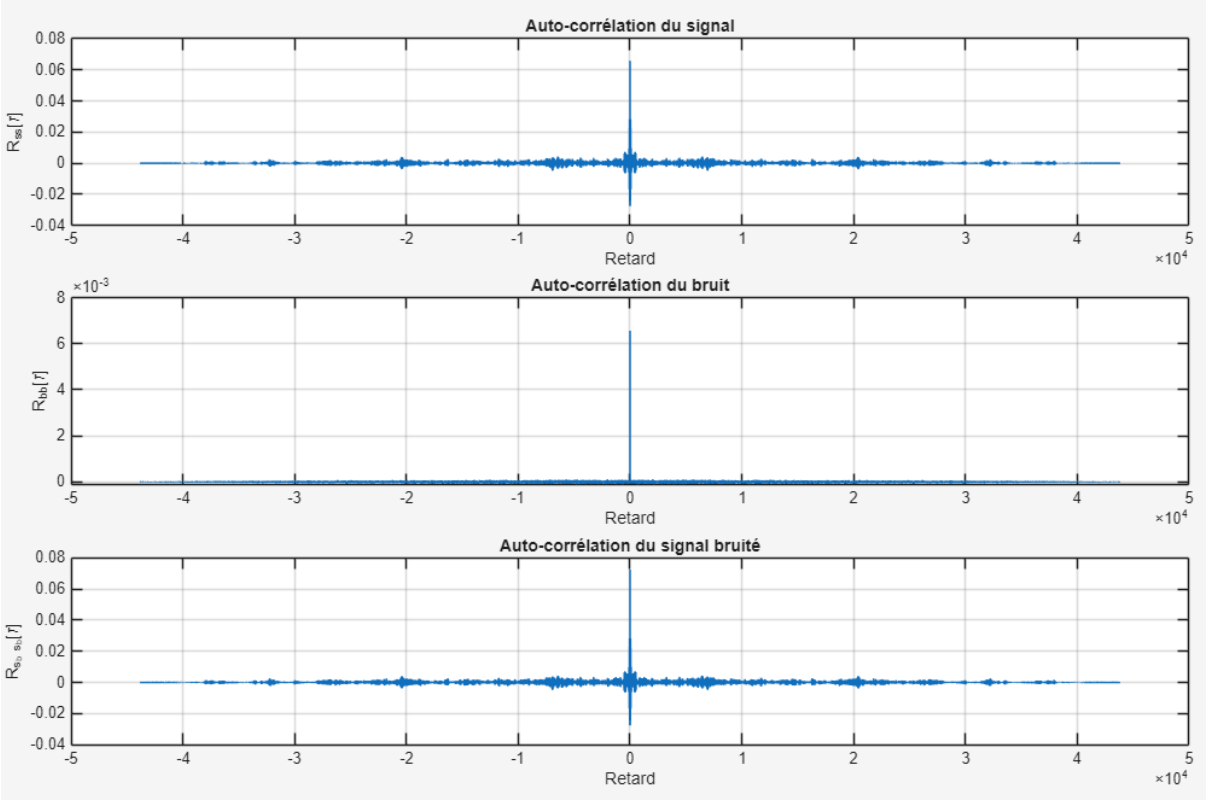



*Figure 12 : Auto-corrélations : signal, bruit, signal bruité (RSB = 10 dB)*

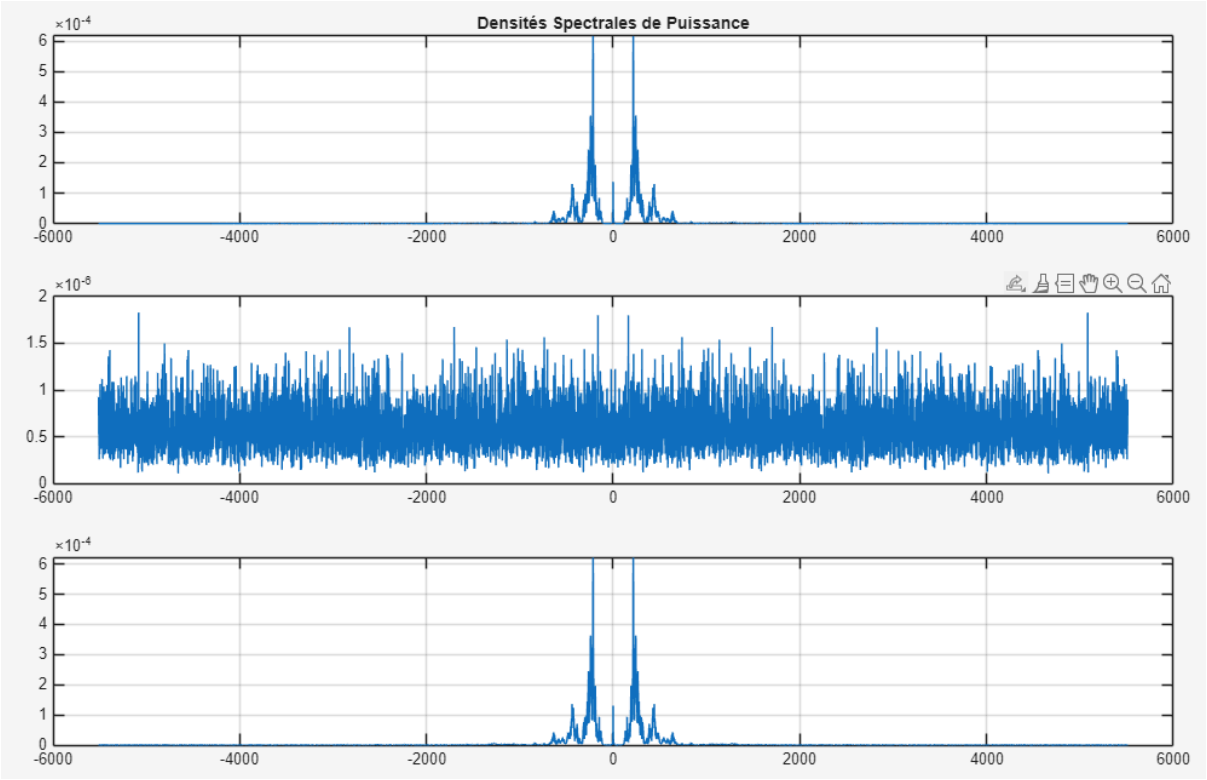



*Figure 13 : Densités spectrales de puissance &: signal, bruit, signal bruité (RSB = 10 dB)*

À RSB = 10 dB, on reconnaît encore la parole, mais un souffle est présent en continu : il remplit les silences. Sur le spectrogramme, ce souffle apparaît comme un fond uniforme sur toutes les fréquences, tandis que les bandes de la parole restent visibles mais avec moins de contraste. L'autocorrélation du bruit montre un gros pic au centre et presque rien ailleurs (typique d'un bruit « blanc »), alors que celle du signal garde des bosses liées à sa périodicité ; pour le signal bruité, on voit ces bosses avec un centre plus haut à cause du bruit. Enfin, sur la DSP, le bruit forme un plancher plat, et la courbe du signal bruité correspond à l'enveloppe du signal posée sur ce plancher : en clair, le bruit remonte le niveau de fond sans faire disparaître totalement les informations utiles de la parole.

## Pour RSB = 20 dB

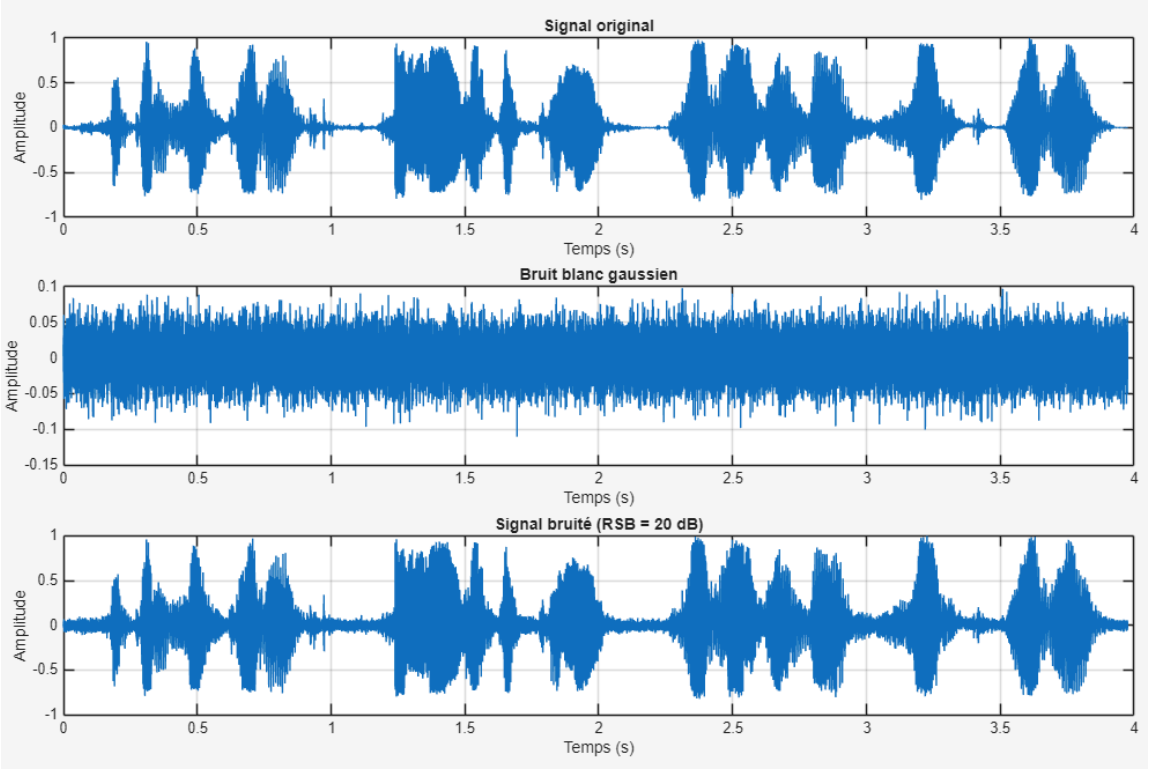



*Figure 14 : Signaux temporels : signal original, bruit blanc gaussien, signal bruité (RSB = 20 dB)*

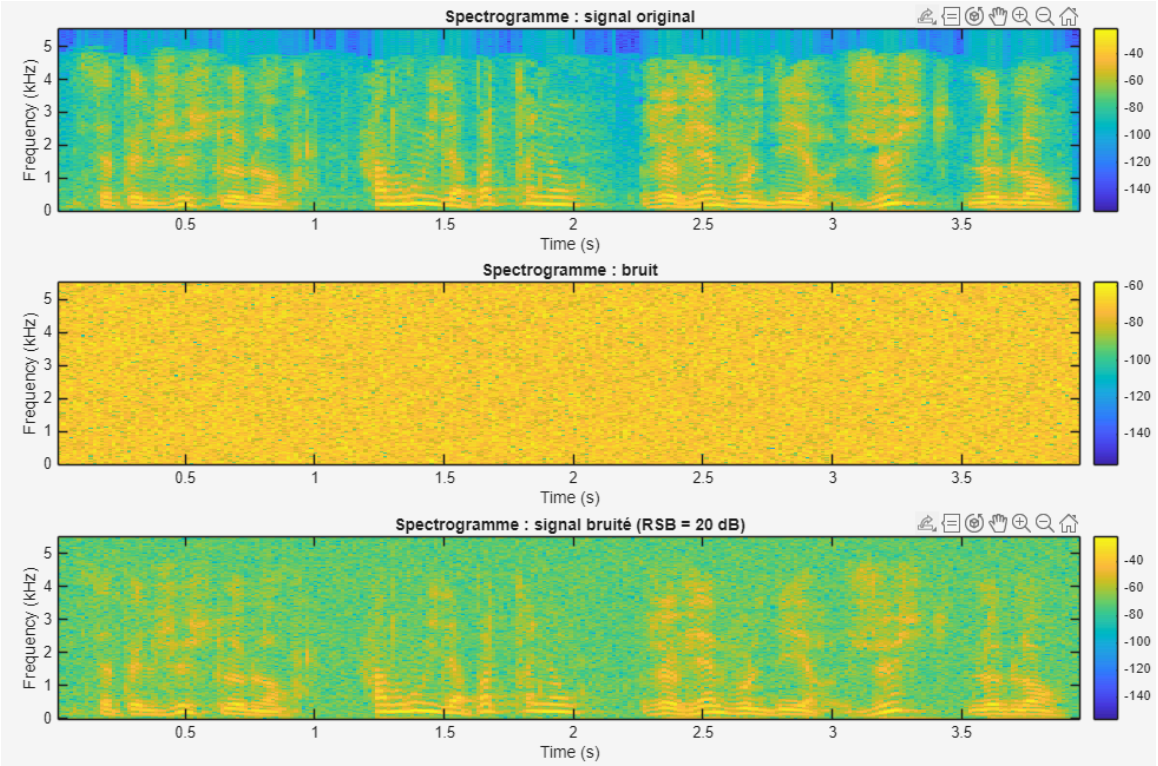



*Figure 15* : *Spectrogrammes: signal original, bruit, signal bruité (RSB = 20 dB)*

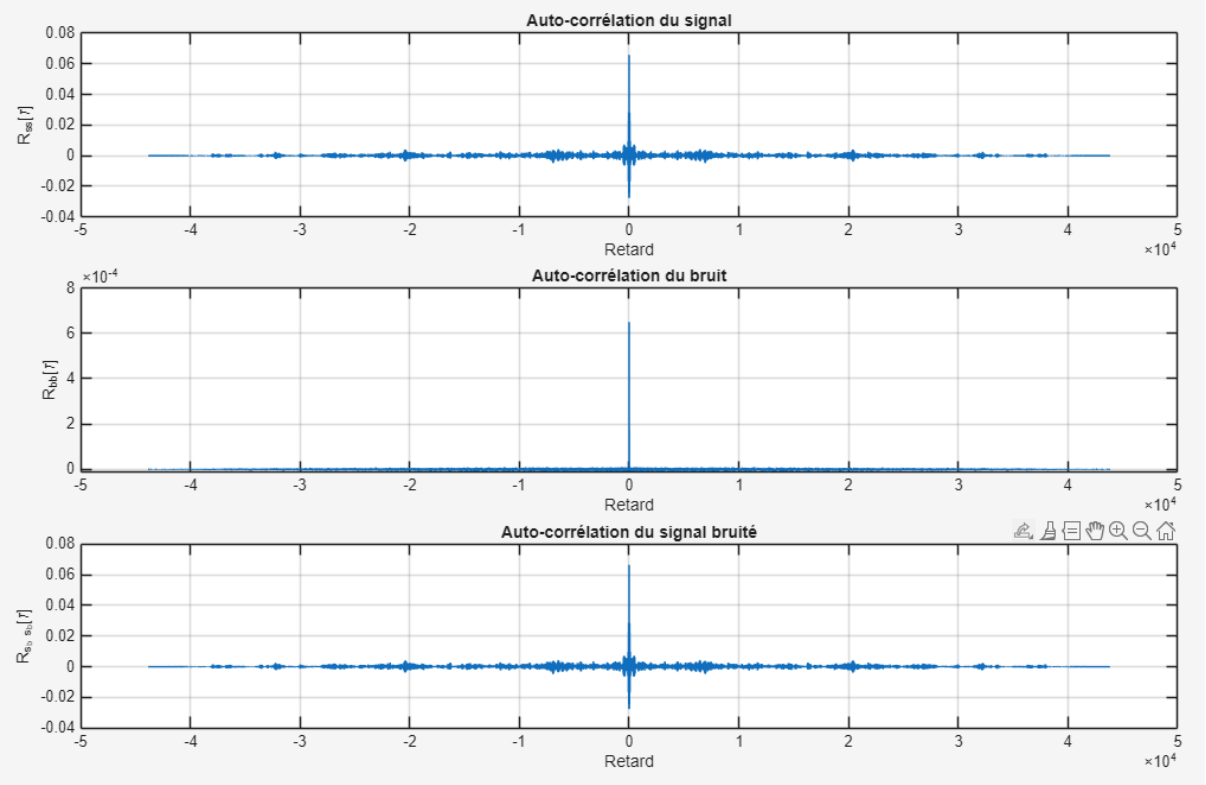



*Figure 16 : Auto-corrélations : signal, bruit, signal bruité (RSB = 20 dB)*

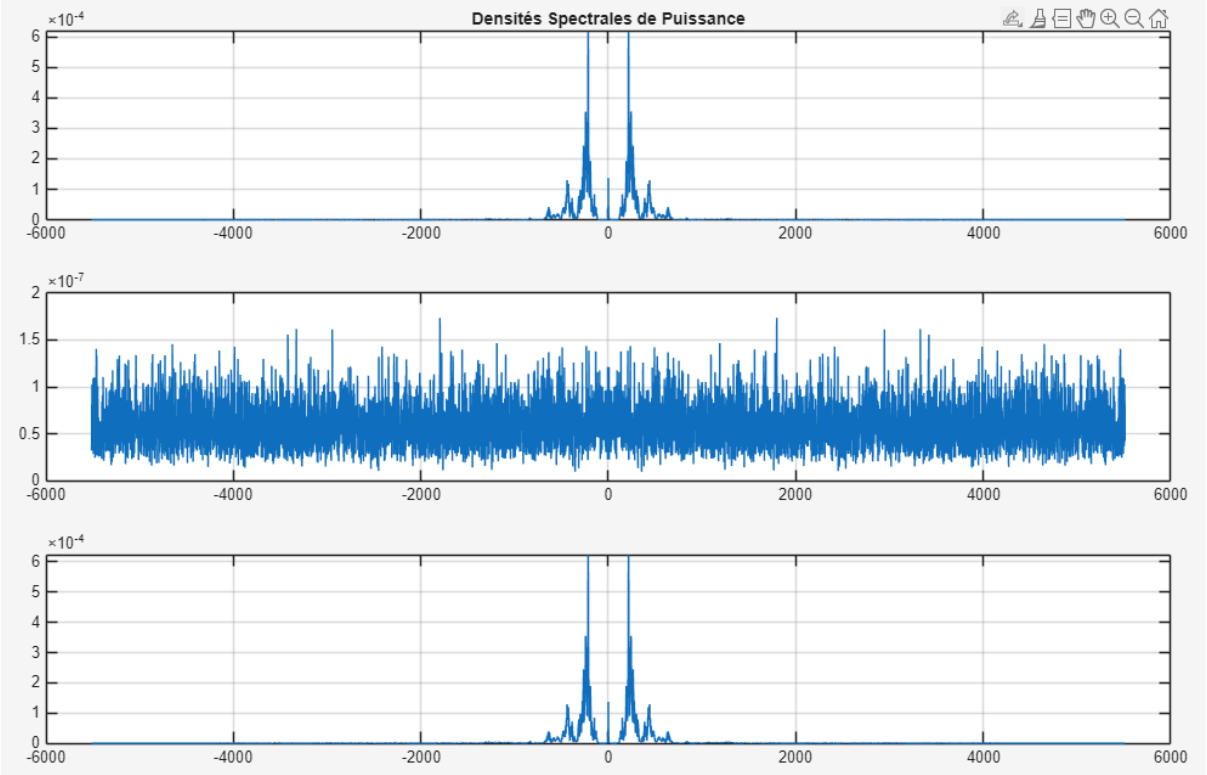



*Figure 17 : Densités spectrales de puissance &: signal, bruit, signal bruité (RSB = 20 dB)*

À RSB = 20 dB, la parole reste très claire : on entend très clairement les syllabes et les silences, le souffle ajouté est discret et n'écrase pas la forme d'onde. Sur le spectrogramme, traces verticales et zones d'énergie sont bien dessinées représentant les bandes de la parole ; on perçoit seulement un fond léger dû au bruit. Pour l'autocorrélation, le bruit montre un gros pic au centre et presque rien ailleurs (typique d'un bruit blanc), tandis que le signal garde ses bosses de périodicité ; pour le signal bruité, ces bosses sont visibles et le centre est juste un peu rehaussé par le bruit. Enfin, sur la DSP, on observe l'enveloppe du signal posée au-dessus d'un plancher plat de bruit, suffisamment basse pour laisser apparaître confortablement les informations utiles de la parole.

### Influence du RSB sur le bruit :

En comparant les résultats obtenus entre RSB = 10 dB et RSB = 20 dB, on peut en déduire que plus le RSB est élevé, plus le bruit est discret et plus la parole est claire.
À l'inverse, quand le RSB baisse, la parole devient de moins en moins claire.

# Partie B2 : DÉBRUITAGE PAR FILTRAGE DE WIENER

On modélise le signal bruité par $x = s + b$ (parole + bruit) et on cherche à retrouver s en réduisant l'erreur quadratique : c'est le principe du filtre de Wiener.

D'après les équations de Wiener, on a $R_{xx}h = r_{xs}$ ce qui correspond à un filtre h optimal.

## Fonction debruit.m et comparaison avec l'exercice 5 du TD

Dans l'exercice 5 (Wiener « classique »), on cherche un filtre h appliqué à x pour estimer s en minimisant, ce qui mène aux équations de Wiener–Hopf. Dans cette situation, on suppose que l'on connaît des informations sur s.

Dans la fonction debruit.m, on ne connaît pas $\hat{s}$ : on dispose d'un référentiel de bruit b synchronisé.
On estime les DSP $S_{xx}(f)$ (depuis x) et $S_{bb}(f)$ (depuis b), puis on applique un gain de Wiener fréquentiel :

$H(f) = 1 - \frac{S_{bb}(f)}{S_{xx}(f)} \approx \frac{S_{ss}(f)}{S_{ss}(f)+S_{bb}(f)}$ avec $S_{ss} \approx S_{xx} - S_{bb}$

On filtre dans le domaine fréquentiel : $Y(f) = H(f)\,X(f)$, puis IFFT pour obtenir $\hat{s}$.
Le filtrage est appliqué par trames ~20–30 ms puis recombinaison (overlap-add).

On applique le débruitage :

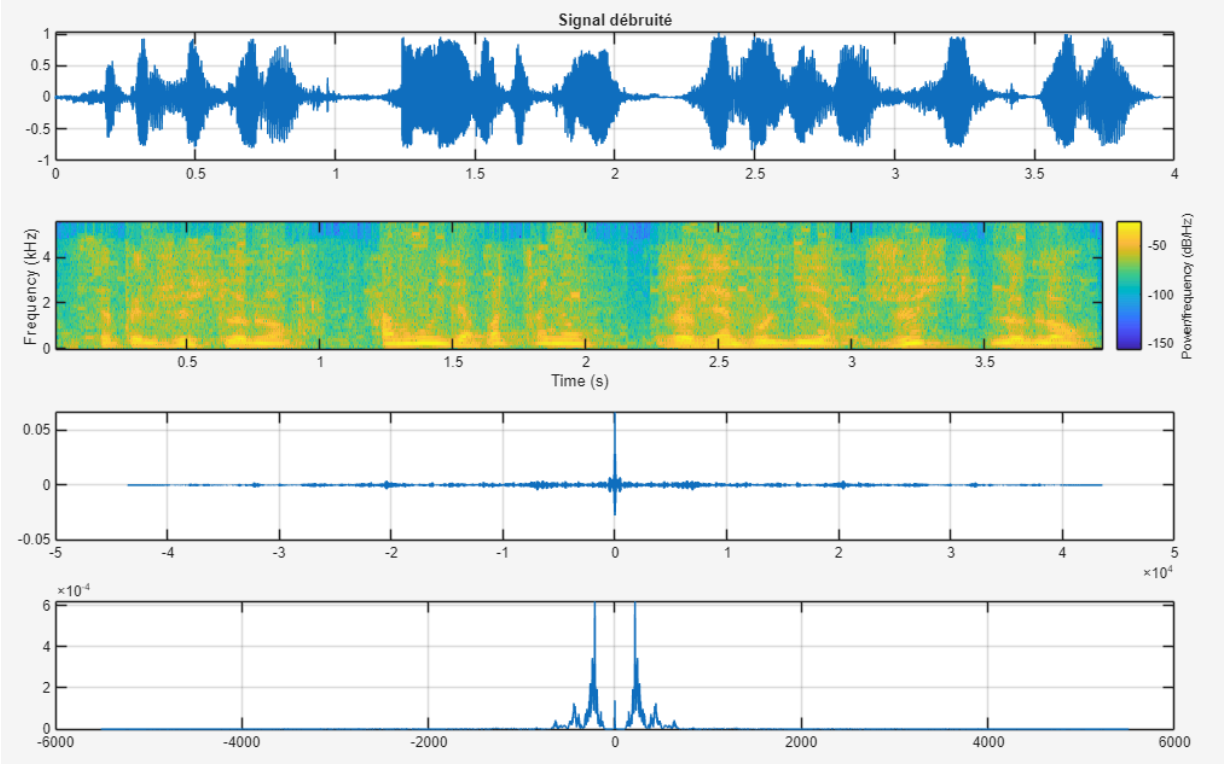



*Figure 18 : Signal débruité (filtre de Wiener) : temps, spectrogramme, autocorrélation et DSP*

Après débruitage, la parole ressort mieux : le souffle de fond est réduit et les silences sont plus propres. Sur le spectrogramme, les bandes de la parole réapparaissent avec plus de contraste car le bruit est plus bas. L'autocorrélation montre des bosses de périodicité bien visibles et un pic central moins gonflé qu'avec le signal bruité. Enfin, sur la DSP, le plancher plat du bruit a baissé, ce qui fait mieux ressortir les pics d'énergie du signal.

Pour conclure,  le filtre de Wiener a abaissé le bruit sans trop abîmer la parole. À l'oreille, on doit sentir un souffle moindre et une intelligibilité un peu meilleure. Limite normale : un filtre court (ordre 1) peut laisser du bruit résiduel et lisser légèrement certains détails.

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans la Partie A, on a montré que la sinusoïde + bruit n'est pas stationnaire d'ordre 1 (l'espérance dépend du temps) et pas ergodique d'ordre 1 (la moyenne temporelle d'une réalisation ne vaut pas la moyenne d'ensemble). Pour les bruits, l'histogramme renseigne la loi (gaussienne vs uniforme) mais pas la blancheur : après recentrage, l'autocorrélation présente un pic à $\tau = 0$ et ~0 ailleurs, ce qui confirme des bruits blancs.

Dans la Partie B1, on a visualisé l'effet du RSB : plus le RSB est grand, plus la parole reste lisible. Dans la Partie B2, le débruitage (Wiener par trames ~30 ms) abaisse le bruit de fond et rend la parole plus claire, tout en restant limité par l'ordre court du filtre et l'estimation sur fenêtres courtes.